Fonctions exponentielle et logarithme

Outils Mathématiques

Prérequis

Etre capable de :

- Placer des points sur un repère à déterminer ;
- Représenter graphiquement une fonction ;
- Etudier les variations d'une fonction à partir de sa courbe représentative.

Objectifs

Etre capable de :

- Connaître les propriétés opératoires de fonctions exponentielle et logarithme ;
- Construire les représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme.

I. Fonction logarithme

A. Fonction logarithme népérien

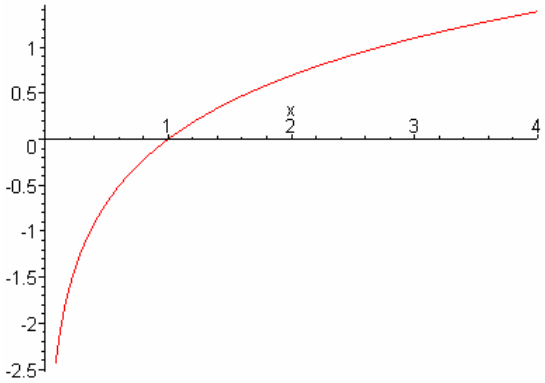
1. Définition

La fonction **logarithme népérien** :

$$\ln : x \mapsto \ln x$$

est définie et **croissante** sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Pour obtenir $\ln x$ à l'aide d'une calculatrice, on utilise la touche $\boxed{\ln}$.



NB :

$\ln 1 = 0$;

$\ln e = 1$ avec $e \approx 2{,}718$.

2. Propriétés

Quels que soient les nombres strictement positifs a et b :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

Pour tout nombre entier ou fractionnaire n :

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

De plus :

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

B. Fonction logarithme décimal

1. Définition

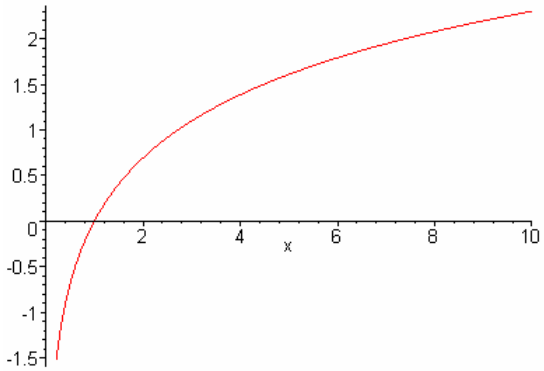
La fonction **logarithme décimal** :

$$\log : x \mapsto \log x$$

est définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Elle est **croissante** sur l'intervalle]0 ; +∞[.



Pour obtenir $\log x$ à l'aide d'une calculatrice, on utilise la touche log.

NB :

log1=0 ; log10=1 ; log100=2 …

2. Propriétés

Quels que soient les nombres strictement positifs a et b :

$$\log(a \times b) = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log \frac{1}{b} = -\log b$$

Pour tout nombre entier ou fractionnaire n :

$$\log(a^n) = n \log a$$

De plus :

$$\log a = \log b \Leftrightarrow a = b$$

$$\log a < \log b \Leftrightarrow a < b$$

II. Fonction exponentielle

A. Fonction exponentielle de base a

1. Définition

Soit a un réel strictement positif différent de 1.

La fonction **exponentielle de base a** : $x \mapsto a^x$ est définie sur]-∞ ; +∞[.

Pour obtenir a^x à l'aide d'une calculatrice, on utilise la touche « puissance ».

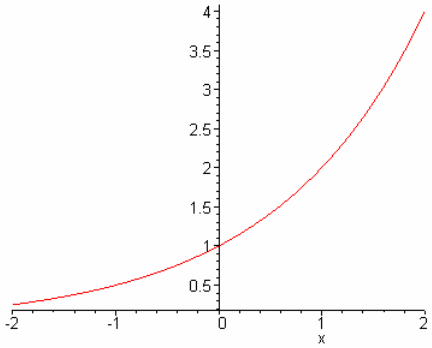
NB :

$a^0=1$ et $a^1=a$

2. Sens de variation – Courbe représentative

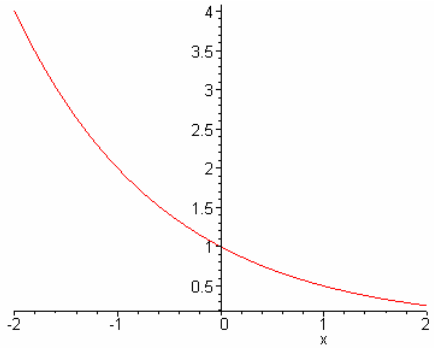
➢ Si $a>1$,

la fonction $x \mapsto a^x$ est croissante :



➢ Si $a<1$,

la fonction $x \mapsto a^x$ est décroissante :



3. Propriétés

Quels que soient les nombres réels x et y :

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

Et on rappelle :

$$\ln(a^x) = x \ln a \qquad \log(a^x) = x \log a$$

B. Fonction exponentielle de base e

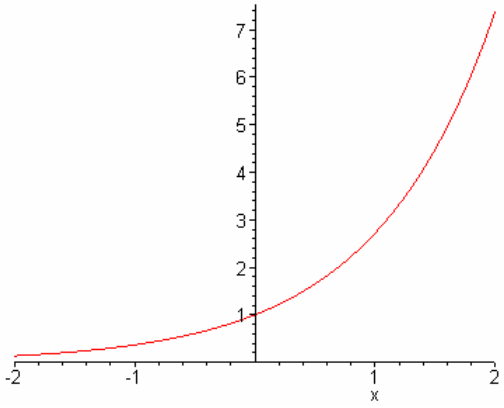
1. Définition

La fonction **exponentielle de base e** : $x \mapsto e^x$ est définie et **croissante** sur $]-\infty ; +\infty[$.

Pour obtenir e^x à l'aide d'une calculatrice, on utilise la touche e^x ou $\exp x$.

NB :

$e^0=1$ et $e^1=e\approx 2{,}71828$



2. Propriétés

Quels que soient les nombres réels x et y :

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \qquad (e^x)^y = e^{xy}$$

Et :

$$\ln(e^x) = x$$

$$y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$$