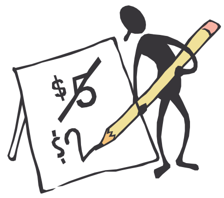
Fonctions et dérivation



Outils Mathématiques

Prérequis

Etre capable de :

- Placer des points sur un repère à déterminer ;
- Représenter graphiquement une fonction ;
- Etudier les variations d'une fonction à partir de sa courbe représentative.

Objectifs

Etre capable de :

- Déterminer graphiquement le nombre dérivé d'une fonction en un point ;
- Construire une tangente à une courbe d'équation $y=f(x)$;
- Connaître les dérivées des fonctions usuelles ;
- Connaître les propriétés des dérivées.

I. Notion de nombre dérivé

A. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant le nombre a; C est la courbe représentative de f.
En son point A $(a;\ f(a))$, la courbe C admet une tangente T non parallèle à l'axe des ordonnées.

On appelle **nombre dérivé de la fonction f en a** *le coefficient directeur de la tangente T.*
On le note $f'(a)$.

B. Tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction

1. Construction

Pour construire la tangente T à C en A $(a;\ f(a))$, on construit le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ de coordonnées (1 ; $f'(a)$) ; la tangente T est alors la droite (AA').

2. Equation de la tangente

La tangente T à C en A a une équation :

- de la forme : $y=f'(a)\times x+p$;
- que les coordonnées du point A vérifient.

C. Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I.

On appelle **fonction dérivée (ou dérivée)** de la fonction f *la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$.*
On la note f'.

II. Propriétés des fonctions dérivées

A. Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction définie et dérivable sur I (et soit f' sa dérivée).

- Si pour tout x de I, $f'(x)=0$, alors la fonction f est **constante** sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x)>0$, alors la fonction f est **croissante** sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x)<0$, alors la fonction f est **décroissante** sur I.

B. Dérivée d'une somme, d'un produit par une constante

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables (et soient u' et v' leurs dérivées) sur I et a un nombre réel.
On a alors :

- **La dérivée de la somme des deux fonctions** est *la somme des deux dérivées* :
$$(u+v)' = u' + v'$$
- **La dérivée du produit de la fonction par la constante** est *le produit de la fonction dérivée par la constante* :
$$(a\,u)' = a\,u'$$

III. Etude des fonctions usuelles

A. Fonctions affine ou linéaire

1. Dérivée

Si $f(x) = ax + b$ (avec b nul ou non) alors : $f'(x) = a$

2. Tableau de variation

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x) = a$	signe de a
$ax+b$	si a<0 $\searrow$ ou si a>0 $\nearrow$

B. Fonction carré

1. Dérivée

Si $f(x) = x^2$ alors : $f'(x) = 2x$

2. Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = 2x$		$-$	0	$+$	
x^2		↘	0	↗	

C. Fonction cube

1. Dérivée

Si $f(x) = x^3$ alors : $f'(x) = 3x^2$

2. Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x) = 3x^2$		$+$	
x^3		↗	

D. Fonction inverse

1. Dérivée

Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alors : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

2. Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$		$-$	‖	$-$	
$\dfrac{1}{x}$		↘	‖	↘	

E. Récapitulatif

Fonction $f : x \mapsto f(x)$	Dérivée : $f' : x \mapsto f'(x)$
$ax + b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$au(x)$	$au'(x)$