Equations, inéquations et systèmes

Outils Mathématiques

Prérequis

Etre capable de :

- Résoudre une (in)équation du 1er degré à une inconnue ;
- Traiter un problème du 1er degré à l'aide d'une (in)équation ;
- Résoudre une équation du 1er degré à deux inconnues par le calcul ou graphiquement.

Objectifs

Etre capable de :

- Résoudre des (in)équations du 2nd degré se ramenant à du 1er degré ;
- Résoudre graphiquement des systèmes de deux inéquations du 1er degré à inconnues.

I. Equations du 1er degré ou apparentées

A. Rappels : résolution

Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue :

- on enlève les parenthèses et les fractions ;
- on regroupe tous les termes contenant l'inconnue dans un membre et tous les termes connus dans l'autre membre ;
- on a alors une équation du type :

$$ax = b \ ;$$

- si a≠0, cette équation a pour solution :

$$x = \frac{b}{a}.$$

B. Equations apparentées au 1er degré

Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

Certaines équations de degré supérieur à un peuvent, en se factorisant, se mettre sous la forme :

$$E(x) = P(x) \times Q(x) = 0$$

On a alors deux équations à résoudre :

$$P(x) = 0 \text{ ou } Q(x) = 0$$

On pourra donc avoir plusieurs solutions.

II. Inéquations du 1^er degré ou apparentées

A. Rappels : résolution

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue :

- on enlève les parenthèses et les fractions ;
- on regroupe tous les termes contenant l'inconnue dans un membre et tous les termes connus dans l'autre membre ;
- on a alors une inéquation du type :

$$ax \leq b \text{ ou } ax \geq b \text{ ou } ax < b \text{ ou } ax > b \text{ ;}$$

- on divise les deux membres par a, mais attention :
  - si $a > 0$, on conserve le sens de l'inéquation ;
  - si $a < 0$, on change le sens de l'inéquation.
- on donne l'ensemble des solutions et leur représentation.

B. Inéquations apparentées au 1^er degré

Si $a \times b > 0$ alors $a > 0$ et $b > 0$ ou $a < 0$ et $b < 0$

Si $a \times b < 0$ alors $a > 0$ et $b < 0$ ou $a < 0$ et $b > 0$

Certaines inéquations de degré supérieur à 1 peuvent, en se factorisant se mettre sous la forme :

$$E(x) = P(x) \times Q(x) > \text{ (ou } < \text{ ou } \leq \text{ ou } \geq \text{) } 0$$

Il faut alors étudier le signe de $P(x)$ et de $Q(x)$ en fonction de x à l'aide d'un tableau de signes et en déduire les solutions de l'inéquation.

III. Systèmes

A. Rappels : résolution d'un système d'équations à 2 inconnues

1. Méthode par substitution

- On utilise une des équations pour exprimer une des inconnues en fonction de l'autre et on reporte l'expression obtenue dans l'autre équation.
- On obtient ainsi une équation du 1^er degré à une inconnue que l'on résout.
- On remplace alors l'inconnue trouvée par sa valeur pour obtenir une équation donnant la valeur de la 2^ème inconnue.

2. Méthode par addition (combinaison)

- On multiplie les équations par des nombres choisis de manière que les coefficients d'une inconnue soient opposés puis on additionne membre à membre les deux équations obtenues.
- On obtient ainsi une équation du 1^er degré à une inconnue que l'on résout.
- On remplace alors l'inconnue trouvée par sa valeur pour obtenir une équation donnant la valeur de la 2^ème inconnue.

B. Systèmes de deux (in)équations à deux inconnues

1. Régionnement du plan

Soit la droite D d'équation : $y = ax + b$

- Pour tout point $M(x\,;\,y)$ situé « sur » de D, on a : $y = ax + b$
- Pour tout point $M(x\,;\,y)$ situé « au-dessous » de D, on a : $y < ax + b$
- Pour tout point $M(x\,;\,y)$ situé « au-dessus » de D, on a : $y > ax + b$

Par la suite, on hachurera la partie du plan dont les points ne correspondent pas à l'inéquation.

2. Résolution graphique des systèmes d'(in)équations à deux inconnues

Pour résoudre graphiquement un système d'(in)équation à deux inconnues :

- on écrit le système sous la forme :

$$\begin{cases} y \ = \ (\text{ou} \ < \ \text{ou} \ > \ \text{ou} \ \leq \ \text{ou} \ \geq) ax + b & (E_1) \\ y \ = \ (\text{ou} \ < \ \text{ou} \ > \ \text{ou} \ \leq \ \text{ou} \ \geq) a'x + b' & (E_2) \end{cases}$$

- on trace les droites d'équations (E_1) et (E_2) dans un repère orthogonal ;
- on lit graphiquement le résultat :
  - pour un système d'équations, la solution est les coordonnées de l'intersection des deux droites ;
  - pour un système d'inéquations, les solutions sont les coordonnées des points ne faisant pas partie de la zone hachurée